**Лабораторная работа № 7**

**E9.1.** В задаче P9.1 мы нашли максимальную устойчивую скорость обучения для алгоритма наискорейшего спуска при применении к конкретной квадратичной функции. Будет ли алгоритм всегда расходиться, когда используется более высокая скорость обучения, или существуют ли какие-либо условия, по которым алгоритм все еще будет сходиться?

E9.2 Мы хотим найти минимум следующей функции:

F(x) = ½ xT[6 -2-2 6]x + [-1 -1]x.

1. Нарисуйте контурный график этой функции.
2. Нарисуйте траекторию алгоритма наискорейшего спуска на контурной диаграмме части (i), если начальное предположение x0 = [0 0]T. Предположим, что используется очень малая скорость обучения.
3. Выполните две итерации наискорейшего спуска с частотой обучения α = 0.1.
4. Какова максимальная устойчивая скорость обучения?
5. Какова максимальная устойчивая скорость обучения для первоначального предположения, указанного в части (ii)? (См. Упражнение E9.1.)
6. Напишите M-файл MATLAB для реализации алгоритма наименьшего спуска для этой проблемы и используйте его, чтобы проверить свои ответы для части (i). через (v).

**E9.3**. Для квадратичной функции

F(x) = x12 + 2x22.

1. Найти минимум функции вдоль линии

x = [1 1] + α[-1 -2].

1. Убедитесь, что градиент F(x) в точке минимума из части (i) ортогонален линии, по которой произошла минимизация.

**E9.4**. Для функций, приведенных в Упражнении E8.3, выполните две итерации самого крутого спускаемого алгоритма с линейной минимизацией, начиная с первоначального предположения x0 = [1 1]T. Напишите MATLAB M-файлы, чтобы проверить свой ответ.

**E9.5**. Рассмотрим следующую функцию:

F(x) = [1 + (x1 +x2 - 5)2][1 + (3x1 – 2x2)2].

1. Выполните одну итерацию метода Ньютона, начиная с первоначального предположения x0 = [10 10]T.
2. Повторите часть (i), начиная с первоначального предположения x0 = [2 2]T.
3. Найдите минимум функции и сравните с результатами предыдущих двух частей.

**E9.6.** Рассмотрим следующую квадратичную функцию

F(x) = ½ xT[3 22 0]x + [4 4]x

1. Нарисуйте контурный график для F(x). Показать все работы.
2. Возьмем одну итерацию метода Ньютона из первоначальной точки x0 = [0 0]T.
3. В части (ii) вы достигли минимума F(x)? Объясните.

**E9.7.** Рассмотрим функцию

F(x) = (x1 +x2)4 + 2(x2 - 1)2

1. Найти приближение рядов Тейлора второго порядка этой функции относительно точки x0 = [-1 1]T.
2. Является ли эта точка точкой минимума? Соответствует ли это условиям первого и второго порядка?
3. Выполните одну итерацию метода Ньютона из первоначального предположения x0 = [0.5 0]T.

**E9.8**. Рассмотрим следующую квадратичную функцию:

F(x) = ½ xT[7 -9-9 -17]x + [16 8]x.

1. Нарисуйте контурный график для этой функции.
2. Сделайте один шаг метода Ньютона от первоначального предположения x0 = [2 2]T.
3. Вы достигли минимума функции после шага Ньютона части (ii)? Объясните.
4. Из первоначального предположения в части ii проследите путь наискорейшего спуска с очень небольшой скоростью обучения на контурном графике из части (i). Объясните, как вы определили путь. Будет ли наклонный спуск в конечном итоге сходиться к тому же результату, который вы нашли в части (ii)? Объясните.

**E9.9**. Рассмотрим следующую функцию:

F(x) = (1 + x1 + x2)2 + ¼ x14.

1. Найти квадратичное приближение F(x) примерно к точке x0 = [2 2]T.
2. Нарисуйте контурный график квадратичного приближения в части i.
3. Выполните одну итерацию метода Ньютона для функции F(x) из начального условия x0, указанного в части (i). Нарисуйте путь от x0 графика до x1 участка из (ii).
4. Является x1 из части iii. сильным минимумом квадратичного приближения? Является ли это сильным минимумом исходной функции F(x)? Объясните.
5. Будет ли метод Ньютона всегда сходиться к сильному минимуму F(x), учитывая достаточные итерации? Всегда ли оно будет сходиться к сильному минимуму квадратичной аппроксимации? Объясните свои ответы в деталях.

**E9.10** Вспомните функцию, представленную в Упражнении E8.5. Напишите MATLAB M-файлы для реализации алгоритма наименьшего спуска и метода Ньютона для этой функции. Проверьте эффективность алгоритмов для различных исходных данных.

**E9.11** Повторите упражнение E9.4 с использованием алгоритма сопряженного градиента. Используйте один из трех методов (Eq. (9.61) -Eq. (9.63)) по крайней мере один раз.

**E9.12** Доказать или опровергнуть следующее утверждение:

Если p1 сопряжено с p2 и p2 сопряжено с p3, то p1 сопряжено с p3.